

**Examen de admitere**  
Facultatea de Matematică și Informatică  
Proba scrisă – **Matematică**  
septembrie 2024  
**Versiunea 1**

1. [4 puncte] Dacă  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^{-x+2}$ , atunci  $f'(2)$  este egală cu:
- A. 0
  - B.  $\frac{1}{3}$
  - C.  $\frac{e}{2}$
  - D. -1**
  - E.  $-\frac{1}{e}$
  - F.  $\frac{1}{2}$

**Soluție:** Deoarece  $f'(x) = (1 - x)e^{-x+2}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , rezultă că  $f'(2) = -1$ .

2. [5 puncte] Dacă  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 1}$ , atunci valoarea integralei  $\int_0^1 f'(x)e^{2f(x)} dx$  este:
- A.  $\frac{e^2(e^2 - 1)}{2}$
  - B.  $\frac{1}{2}$
  - C.  $\frac{e}{2}$
  - D. 0**
  - E. -1
  - F.  $\frac{e^2 - e}{2}$

**Soluție:** Avem:

$$\int_0^1 f'(x)e^{2f(x)} dx = \frac{1}{2}e^{2f(x)} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e^{2f(1)} - e^{2f(0)}).$$

Deoarece  $f(0) = f(1) = 2$ , rezultă că valoarea cerută este egală cu 0.

3. [4 puncte] Pe mulțimea numerelor reale,  $\mathbb{R}$ , definim legea de compoziție asociativă  $x \circ y = 3xy - 2x - 2y + 2$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ . Simetricul elementului  $x = 3$  față de această lege este:
- A. elementul  $x = 3$  nu este simetrizabil
  - B. 2
  - C.  $\frac{7}{3}$
  - D. 1
  - E.  $\frac{5}{7}$**
  - F.  $\frac{2}{3}$

**Soluție:** Se obține că  $e = 1$  este element neutru al acestei legi de compoziție, iar dacă  $x'$  ar fi simetricul lui  $x$  egalitatea  $x \circ x' = 1$  arată că  $x'$  există și  $x' = \frac{5}{7}$ .

4. [5 puncte] Pentru  $a \in \mathbb{C}$ , considerăm matricele  $A(a) = \begin{pmatrix} 2+a & 5 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ . Suma elementelor mulțimii  $M = \{a \in \mathbb{C} : A(a) \text{ nu este inversabilă} \}$  este:
- A. 5
  - B. 1
  - C. 2
  - D. 12
  - E. 7
  - F. -2**

**Soluție:** Matricea  $A(a)$  nu este inversabilă dacă și numai dacă  $\det(A(a)) = 0$  ceea ce este echivalent cu  $a^2 + 2a + 5 = 0$ . Mulțimea  $M$  este deci mulțimea soluțiilor (complexe) ale acestei ecuații și atunci, conform relațiilor lui Viète, suma cerută este egală cu  $-2$ .

5. [4 puncte] Suma pătratelor soluțiilor ecuației  $\log_3(3x) + \log_{x^2} 9 = \frac{7}{2}$  este
- A. 53
  - B. 30
  - C. 21
  - D.  $3 + \sqrt{3}$
  - E.  $9\sqrt{3} + 3$
  - F. 84**

**Soluție:** În condițiile de existență ( $x > 0$ ,  $x \neq 1$ ) ecuația este echivalentă cu

$$1 + \log_3 x + \frac{1}{2} \log_x 3^2 = \frac{7}{2},$$

sau echivalent,  $\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} - \frac{5}{2} = 0$ . Se obține că  $\log_3 x \in \left\{ \frac{1}{2}, 2 \right\}$ , ceea ce conduce la faptul că  $x \in \{\sqrt{3}, 9\}$ . Suma cerută este egală cu 84.

6. [4 puncte] Fie  $a, b \in \mathbb{R}$  și polinomul  $p = X^4 - X^2 + 4aX - b \in \mathbb{R}[X]$ . Dacă  $x_1 = 1 - i \in \mathbb{C}$  este rădăcină a polinomului  $p$ , atunci restul împărțirii polinomului  $p$  la  $X^2 - 2X + 2$  este egal cu
- A.  $X - i$
- B.  $2X - 1$
- C.  $-i$
- D. 0**
- E.  $X$
- F.  $X + 1$

**Soluție:** Deoarece  $p \in \mathbb{R}[X]$ , iar  $x_1 = 1 - i$  este rădăcină, rezultă că și  $x_2 = \overline{x_1} = 1 + i$  este tot o rădăcină a polinomului  $p$ . Atunci  $p$  se va divide prin  $(X - 1 + i)(X - 1 - i) = X^2 - 2X + 2$ , deci restul cerut este polinomul nul.

7. [5 puncte] Fie  $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x \sin x$ ,  $F(x) = (a \sin x + b \cos x)e^x$ . Perechea  $(a, b)$  de numere reale, pentru care funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$  este
- A.  $(1, 0)$
- B.  $(1, 1)$
- C.  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$**
- D.  $(1, -1)$
- E.  $(-1, 1)$
- F.  $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

**Soluție:** Funcția  $F$  este derivabilă și  $F'(x) = ((a - b) \sin x + (a + b) \cos x)e^x$ . Rezultă că funcția  $F$  va fi o primitivă a funcției  $f$  dacă și numai dacă  $\begin{cases} a - b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$ , sistem cu soluția  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ .

8. [5 puncte] Într-un reper cartezian fixat, considerăm punctele  $A(-2, 1)$ ,  $B(a, 3)$  și respectiv  $C(2, 2)$ . Fie  $M, N, P$  mijloacele laturilor  $[BC]$ ,  $[AC]$ , respectiv  $[AB]$ . Suma numerelor reale  $a$  pentru care aria  $\Delta MNP$  este egală cu 1 este:
- A. 8
- B. 1
- C. 2
- D. 0
- E. 12**
- F. -3

**Soluție:** Avem că  $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & a & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{|a - 6|}{2}$ . Deoarece  $\mathcal{A}_{\Delta MNP} = \frac{1}{4} \mathcal{A}_{\Delta ABC}$ , rezultă că  $|a - 6| = 8$  ceea ce este echivalent cu  $a \in \{-2, 14\}$ .

9. [5 puncte] Fie  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Atunci matricea  $A^{2024}$  este egală cu
- A.  $2024I_2$
  - B.  $2^{1012}I_2$
  - C.  $I_2$
  - D.  $2024A - 2023I_2$**
  - E.  $2024(A - I_2)$
  - F.  $2024A$

**Soluție:** Avem că  $A = I_2 + B$ , unde  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

Deoarece  $B \cdot I_2 = I_2 \cdot B$ , iar  $B^2 = O_2$ , rezultă (conform formulei binomului lui Newton) că  $A^n = \mathbf{C}_n^0 I_2 + \mathbf{C}_n^1 B = I_2 + nB = I_2 + n(A - I_2) = nA - (n - 1)I_2$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

O altă variantă posibilă de rezolvare este determinarea prin inducție a formei matricei  $A^n$ .

10. [5 puncte] Fie  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ . Câte din următoarele afirmații sunt adevărate:
- (i)  $f'(e^2) = 1$ ;
  - (ii) Funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $(0, \infty)$ ;
  - (iii) Funcția  $f$  este derivabilă pe  $(0, \infty)$ ;
  - (iv)  $x = e^2$  este punct de extrem local pentru funcția  $f$ ;
  - (v) Funcția  $f$  are un unic punct de extrem local.
- A. 0
  - B. 1
  - C. 2
  - D. 3**
  - E. 4
  - F. 5

**Soluție:** Funcția  $f$  este raportul bine definit a două funcții derivabile pe  $(0, \infty)$  și deci funcția  $f$  este derivabilă pe intervalul  $(0, \infty)$ , iar  $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$ , pentru orice  $x \in (0, \infty)$ . Atunci  $f'(e^2) = 0 \neq 1$ . Rezultă că afirmația (i) este *falsă*, iar (iii) este *adevărată*.

Funcția  $f'$  este pozitivă pe intervalul  $(0, e^2)$  și negativă pe intervalul  $(e^2, \infty)$  ceea ce arată că  $f$  nu este monotonă pe intervalul  $(0, \infty)$ , iar punctul critic  $x = e^2$  este punct de maxim local, deci afirmația (ii) este *falsă*, iar afirmația (iv) este *adevărată*.

Funcția  $f$  este derivabilă pe intervalul deschis  $(0, \infty)$ , iar unicul punct critic,  $x_0 = e^2$ , este punct de maxim local pentru  $f$ . Rezultă că afirmația (v) este *adevărată*.

11. [4 puncte] Suma  $S = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2024}$ , unde  $i \in \mathbb{C}$  cu  $i^2 = -1$ , este egală cu:
- A. 0
- B.  $-1$
- C. 1**
- D.  $-i$
- E.  $i$
- F. 2024

**Soluție:** Deoarece  $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , iar  $2024 = 4 \cdot 506$ , se obține că  $S = 1$ .

12. [5 puncte] În triunghiul  $\triangle ABC$  se știe că  $AB = 4$ ,  $AC = 3\sqrt{3}$ , iar  $m(\widehat{BAC}) = \frac{\pi}{6}$ . Distanța de la vârful  $A$  la latura  $[BC]$  este egală cu:
- A. 6
- B.  $\frac{6\sqrt{3}}{7}$
- C.  $\frac{6\sqrt{21}}{7}$**
- D.  $\frac{3\sqrt{21}}{7}$
- E.  $2\sqrt{2}$
- F. 23

**Soluție:** Avem că  $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(\hat{A})}{2} = 3\sqrt{3}$ . Pe de alta parte  $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{d(A, BC) \cdot BC}{2}$  și deci  $d(A, BC) = \frac{2\mathcal{A}_{\triangle ABC}}{BC}$ . Din Teorema Cosinusului se obține că  $BC = \sqrt{7}$ , ceea ce conduce la faptul că  $d(A, BC) = \frac{6\sqrt{21}}{7}$ .

13. [5 puncte] Distanța de la punctul  $A(2, 0)$  la mijlocul segmentului  $[BC]$ , cu  $B(-1, 1)$  și  $C(5, -1)$ , este:
- A. 3
- B. 1
- C.  $-1$
- D.  $\sqrt{2}$
- E. 0**
- F. 4

**Soluție:** Dacă  $M$  notează mijlocul segmentului  $[BC]$  atunci  $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = 2$ , iar  $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = 0$ . Rezultă că  $M = A$  și deci distanța cerută este egală cu 0.

14. [4 puncte] Dacă  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$  sunt rădăcinile polinomului  $f = X^3 - X^2 + 3$ , iar  $a = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$  și  $b = \frac{x_2x_3}{x_1} + \frac{x_1x_3}{x_2} + \frac{x_1x_2}{x_3}$  atunci  $a^2 - b^2 - ab$  este egal cu:
- A.  $\frac{5}{3}$
- B.  $-\frac{4}{3}$
- C. 0
- D. -4**
- E. 18
- F.  $\frac{15}{2}$

**Soluție:** Conform relațiilor lui Viéte  $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ,  $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0$ , iar  $S_3 = x_1x_2x_3 = -3$ . Deoarece  $a = \frac{S_2}{S_3} = 0$ , iar  $b = \frac{x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2}{x_1x_2x_3} = \frac{S_2^2 - 2S_1S_3}{S_3} = -2$  se obține că  $a^2 - b^2 - ab = -4$ .

15. [4 puncte] Valoarea limitei  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x)$  este:
- A.  $-\infty$
- B. 2
- C. 1
- D. 0
- E. -1**
- F.  $\frac{1}{2}$

**Soluție:**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{-\sqrt{1 + \frac{2}{x}} - 1} = -1.$$

16. [5 puncte] Valoarea numărului complex  $a \in \mathbb{C}$  pentru care matricea  $A = \begin{pmatrix} a-1 & 2-a \\ a & -a \end{pmatrix}$  este inversa matricei  $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  este:
- A. 5
- B. 1
- C. 2
- D. -2
- E. -1**
- F. 0

**Soluție:** Matricea  $A$  este inversa matricei  $B$  dacă și numai dacă  $AB = I_2$ , ceea ce este echivalent cu  $\begin{pmatrix} 1 & -a-1 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Se obține că  $a = -1$ .

17. [4 puncte] Aria suprafeței cuprinse între graficul funcției  $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - x$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x = -1$ , respectiv  $x = 2$ , este:
- A. 3
- B.  $\frac{5}{6}$
- C.  $\frac{5}{3}$
- D.  $\frac{1}{6}$
- E.  $\frac{11}{6}$**
- F. 2

**Soluție:**

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\Gamma_f} &= \int_{-1}^2 |x^2 - x| dx = \int_{-1}^0 (x^2 - x) dx + \int_0^1 (x - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx = \\ &= \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = \\ &= \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

18. [5 puncte] Fie sistemul de ecuații liniare  $\begin{cases} (m+1)x + y + mz = -5 \\ x - y - mz = 10 \\ (2-m)x + y + z = 1 - m \end{cases}$ , a cărui matrice o notăm cu  $A(m)$ , unde  $m \in \mathbb{R}$ . Considerăm proprietățile:

- (i)  $\det(A(2)) = 4$ ;
- (ii) Pentru orice  $m \in \mathbb{R}$  sistemul este compatibil;
- (iii) Suma elementelor  $m \in \mathbb{R}$  pentru care sistemul este incompatibil este egală cu  $-1$ ;
- (iv) Valoarea numărului real  $m$  pentru care  $(1, 3, -4)$  este soluție a sistemului dat este  $m = 3$ ;
- (v) Există  $m \in \mathbb{R}$  pentru care sistemul dat admite două soluții distincte.

Una din afirmațiile de mai jos este adevărată. Care este aceasta?

- A. Toate proprietățile sunt adevărate.
- B. Numai proprietățile (i) și (v) sunt adevărate.
- C. Singura proprietate falsă este (ii).
- D. Toate proprietățile sunt false.
- E. Singurele proprietăți adevărate sunt (iii) și (iv).

**F. Numai proprietățile (i), (iii) și (iv) sunt adevărate.**

**Soluție:** Avem că  $\det(A(m)) = (m+2)(m-1)$  și deci  $\det(A(2)) = 4$ , ceea ce implică faptul că (i) este adevărată.

Pentru  $m = -2$  avem un minor principal al sistemului pe  $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$

căruia îi corespunde minorul caracteristic  $\Delta_c = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 10 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 25 \neq 0$ , ceea ce arată că sistemul este incompatibil, deci proprietatea (ii) este falsă

Analog ca mai sus se arată că și pentru  $m = 1$  sistemul este incompatibil și cum pentru  $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$  avem că sistemul este de tip Cramer (deci compatibil) rezultă

că singurele valori ale lui  $m \in \mathbb{R}$  pentru care sistemul este incompatibil sunt  $m = -2$  și  $m = 1$ . Rezultă că proprietatea (iii) este *adevărată*.

Tripletul  $(1, 3, -4)$  este soluție a sistemului dat dacă și numai dacă sunt verificate simultan egalitățile  $m + 1 + 3 - 4m = -5$ ,  $1 - 3 + 4m = 10$ , respectiv  $2 - m + 3 - 4 = 1 - m$ , ceea ce se întâmplă dacă și numai dacă  $m = 3$ , deci proprietatea (iv) este *adevărată*.

Sistemul admite două soluții distincte dacă și numai dacă este compatibil nedeterminat. Din cele de mai sus rezultă că sistemul dat este fie compatibil determinat, fie incompatibil. Deci, proprietatea (v) este *falsă*.

19. [4 puncte] Valoarea numărului  $m \in \mathbb{R}$ , pentru care dreptele  $d_1 : (m + 1)x - 2y + 3 = 0$  și respectiv  $d_2 : 3x + y - 1 = 0$  sunt paralele, este:

**A.**  $-7$

B.  $\frac{3}{7}$

C. 0

D. 2024

E.  $\sqrt{2}$

F. 23

**Soluție:** Dreptele  $d_1$  și  $d_2$  sunt paralele dacă și numai dacă au aceeași pantă, deci  $\frac{m+1}{-2} = -3$ , ceea ce este echivalent cu  $m = -7$ .

20. [4 puncte] Integrala nedefinită a funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \sin x$  este:

A.  $\int f(x) dx = x \cos x + \mathcal{C}$

B.  $\int f(x) dx = -x \cos x + \mathcal{C}$

C.  $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \sin x - x \cos x + \mathcal{C}$

D.  $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \sin x + x \cos x + \mathcal{C}$

**E.**  $\int f(x) dx = -x \cos x + \sin x + \mathcal{C}$

F.  $\int f(x) dx = -x \cos x - \sin x + \mathcal{C}$

**Soluție:** Conform formulei de integrare prin părți, vom avea:

$$\int f(x) dx = - \int x(\cos x)' dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + \mathcal{C}.$$

**Numărul total de puncte este: 90**